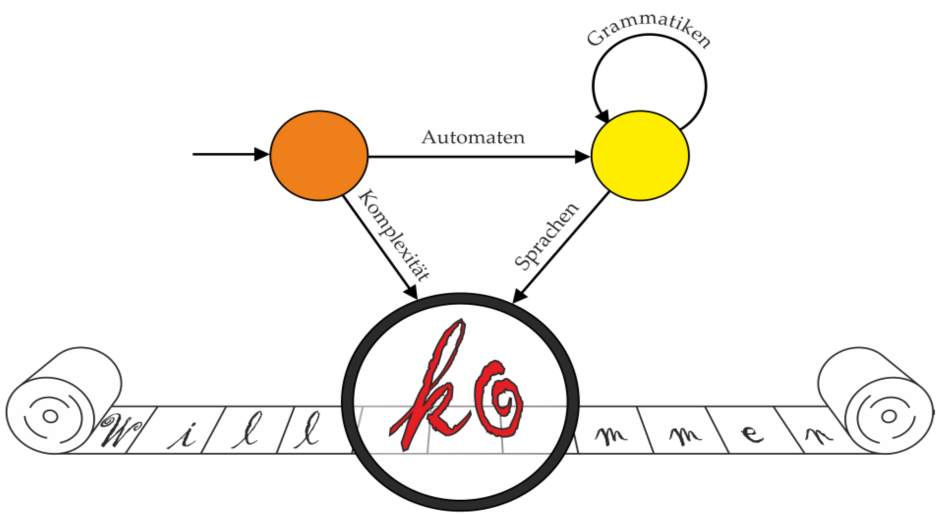
Karlsruhe Institute of Technology

Grundlagen der Informatik II

Tutorium 6

Institut für Angewandte Informatik und Formale Beschreibungsverfahren – Prof. Tatiana von Landesberger



Vorabinformation …

für die Studierenden des Tutoriums am 20.01.20: Zu einigen Aufgaben dieses Tutoriums wird der dazu zugehörige Stoff in der heutigen Vorlesung behandelt.

Aufgabe 6-01: Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Gegeben sei die Sprache $L = \{a^i b^j c^k \mid 1 \leq i \leq j \leq k \in \mathbb{N}\}$. Ist L kontextfrei?

Aufgabe 6-01: Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Gegeben sei die Sprache $L = \{a^i b^j c^k \mid 1 \leq i \leq j \leq k \in \mathbb{N}\}$. Ist L kontextfrei?

Lösung:

- Wähle ein beliebiges n. Dazu das Wort $z = a^n b^n c^n \in L$. Es ist $|z| = 3 \cdot n \geq n$.
- Betrachte eine beliebige Partition von z bzw. $u, v, w, x, y \in \{a, b, c\}^\star$ mit $z = uvwxy = a^n b^n c^n$ und
  (1) $|vwx| \leq n$,
  (2) $|vx| \geq 1$.
- Daraus folgt
  - vx kann maximal zwei der drei Symbole a, b, c enthalten, da $|vwx| \leq n$,
  - enthält vx ein a, so enthält es kein c. Für ein $i > 1$ enthält jedes uv^iwx^iy weniger c's als a's oder b's.
  - enthält vx kein a, so enthält es mindestens ein b oder c. Für $i = 0$ enthält uwy also mehr a's als b's oder c's.
- So haben wir für **jede mögliche Zerlegung** $uvwxy$ von z, für die (1) und (2) gilt, ein i gefunden, für das gilt $uv^iwx^iy \notin L$.
- Gemäß der Folgerung aus dem Pumping-Lemma ist demnach L nicht kontextfrei.

Aufgabe 6-02: Berechenbarkeit

a) Wie lautet die Definition einer berechenbaren Funktion? Geben Sie diese formal an.

Aufgabe 6-02: Berechenbarkeit

a) Wie lautet die Definition einer berechenbaren Funktion? Geben Sie diese formal an.

Lösung:

Gegeben seien ein Alphabet E, die beliebigen Teilmengen $M1$ und $M2$ von E^* sowie eine beliebige Funktion $f: M1 \rightarrow M2$. f heißt berechenbar, wenn es einen Algorithmus $A_f: M1 \rightarrow M2$ gibt, mit $A_f(m_1) = f(m_1), \forall m_1 \in M_1$.

Aufgabe 6-02: Berechenbarkeit

b) Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

	richtig	falsch
Jede Funktion ist berechenbar.	O	O
Die Menge aller berechenbaren Funktionen ist abzählbar.	O	O
Wenn eine Menge M abzählbar ist, dann ist sie auch aufzählbar.	O	O
Die Menge $M = \{n, n+1, n+2, \dots, n+n\}$ für $0 < n < \infty$ ist überabzählbar.	O	O
Das reelle Intervall $[3, 6]$ ist abzählbar.	O	O

Aufgabe 6-02: Berechenbarkeit

b) Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

	richtig	falsch
Jede Funktion ist berechenbar.	O	⊗
Die Menge aller berechenbaren Funktionen ist abzählbar.	⊗	O
Wenn eine Menge M abzählbar ist, dann ist sie auch aufzählbar.	O	⊗
Die Menge $M = \{n, n+1, n+2, \dots, n+n\}$ für $0 < n < \infty$ ist überabzählbar.	O	⊗
Das reelle Intervall $[3, 6]$ ist abzählbar.	O	⊗

Aufgabe 6-03: Halteproblem

a) Definieren Sie das Halteproblem

Aufgabe 6-03: Halteproblem

a) Definieren Sie das Halteproblem

Lösung:

Halteproblem ist Entscheidungsproblem für Sprache L_H:
$L_H = \{\langle w, T_A \rangle,\ w \in (\mathit{E})^* \wedge T_A \textit{ hält auf } w\}$

Aufgabe 6-03: Halteproblem

b) Beweisen Sie die nicht-Entscheidbarkeit des Halteproblems durch das Selbstanwendungsproblem.

Aufgabe 6-03: Halteproblem

b) Beweisen Sie die nicht-Entscheidbarkeit des Halteproblems durch das Selbstanwendungsproblem.

Lösung:

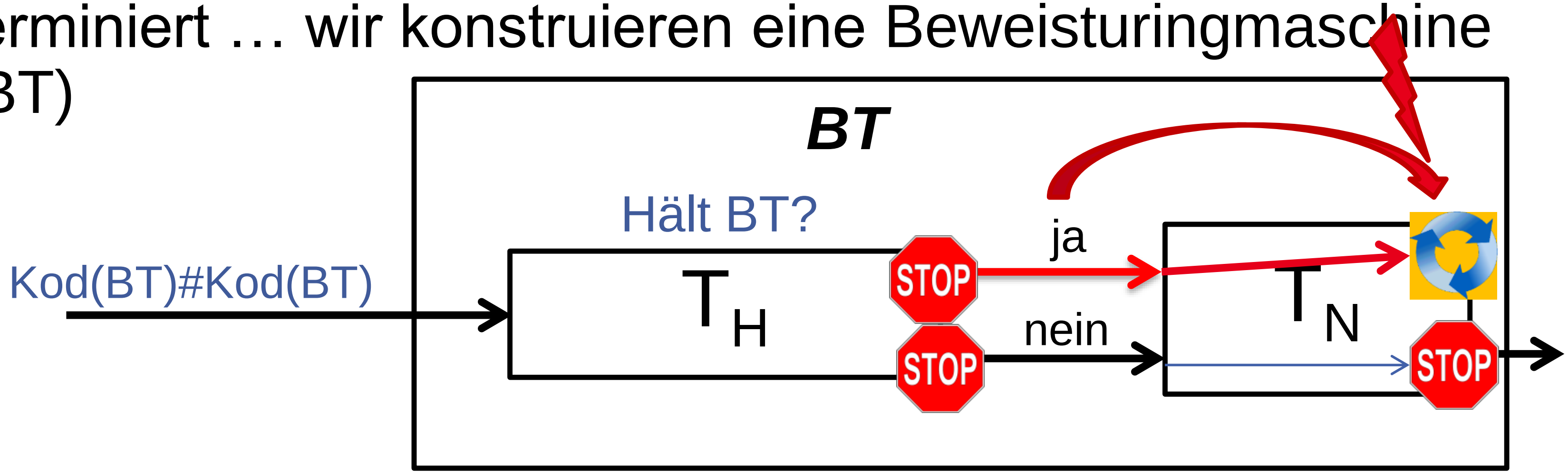
Beweis durch Widerspruch: Angenommen es wäre möglich, mit einer Turingmaschine zu evaluieren, ob die Ausführung einer beliebigen anderen Turingmaschine terminiert … wir konstruieren eine Beweisturingmaschine (BT)

Aufgabe 6-03: Halteproblem

b) Beweisen Sie die nicht-Entscheidbarkeit des Halteproblems durch das Selbstanwendungsproblem.

Lösung:

Beweis durch Widerspruch: Angenommen es wäre möglich, mit einer Turingmaschine zu evaluieren, ob die Ausführung einer beliebigen anderen Turingmaschine terminiert … wir konstruieren eine Beweisturingmaschine (BT)



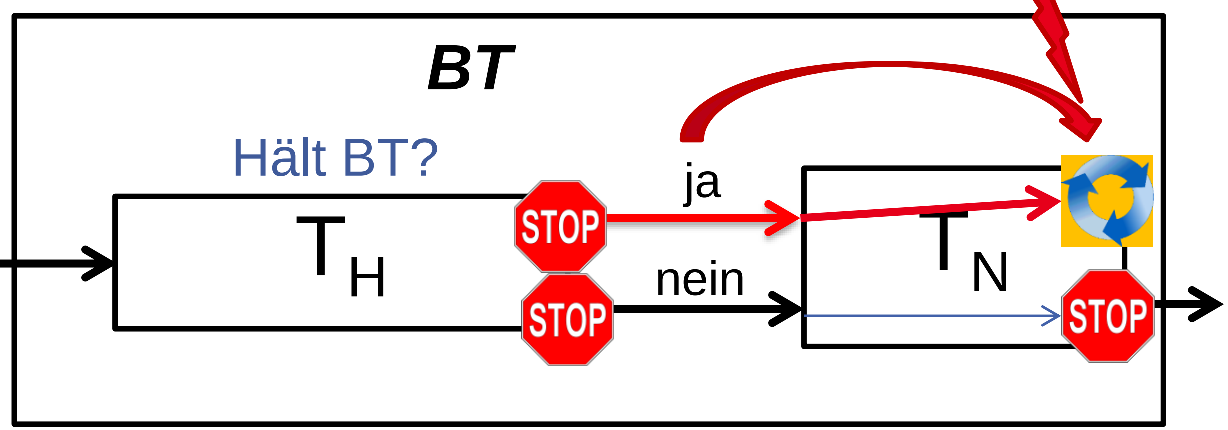
Aufgabe 6-03: Halteproblem

b) Beweisen Sie die nicht-Entscheidbarkeit des Halteproblems durch das Selbstanwendungsproblem.

Lö

Kod(BT) ist die Kodierung der Beweisturingmaschine als Wort. Kod(BT)#Kod(BT) ist sogenannte Selbstanwendung. Hierbei ist „#“ das Trennzeichen, das erste „Kod(BT)“ ist das Wort und das Zweite ist die Kodierung der Turingmaschine.

Be … uch: Angenommen es wäre mö … gmaschine zu evaluieren, ob die Au … bigen anderen Turingmaschine terminiert … wir konstruieren eine Beweisturingmaschine (BT)



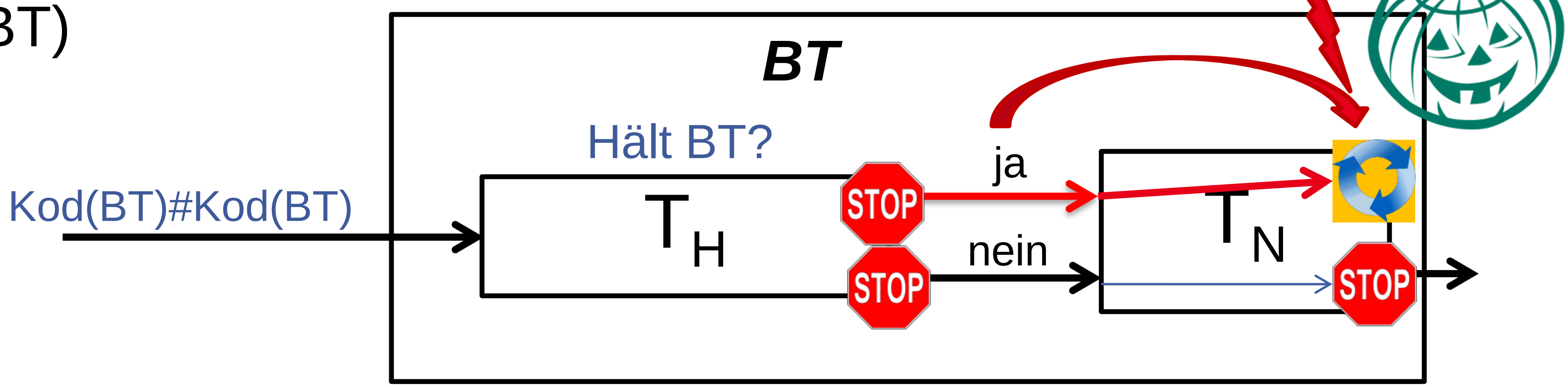
Aufgabe 6-03: Halteproblem

b) Beweisen Sie die nicht-Entscheidbarkeit des Halteproblems durch das Selbstanwendungsproblem.

Lösung:

Unsere Annahme führt zu einem Widerspruch. Folglich ist das Halteproblem nicht entscheidbar.

Beweis durch Widerspruch: Angenommen
möglich, mit einer Turingmaschine zu evalu
Ausführung einer beliebigen anderen Turingmaschine
terminiert … wir konstruieren eine Beweisturingmaschine (BT)



Single Choice Aufgabe 6-04: BDD

Welchen Vorteil haben reduzierte Funktionsgraphen (z.B. Binary Decision Diagram) gegenüber anderen Darstellungsformen für Boolesche Funktionen wie beispielweise Wahrheitstabelle, KNF/DNF?

Single Choice Aufgabe 6-04: BDD

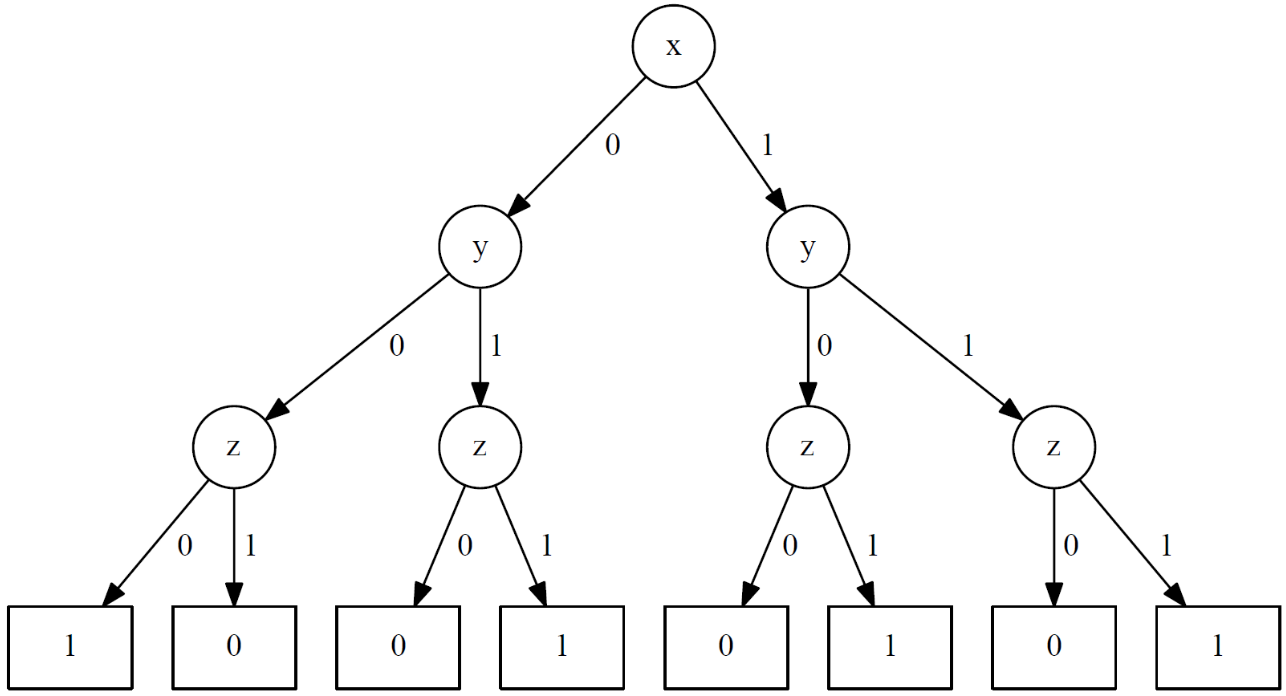
Welchen Vorteil haben reduzierte Funktionsgraphen (z.B. Binary Decision Diagram) gegenüber anderen Darstellungsformen für Boolesche Funktionen wie beispielweise Wahrheitstabelle, KNF/DNF?

Lösung:

- Der Platzbedarf ist häufig wesentlich geringer (im schlimmsten Fall jedoch bei allen Varianten exponentiell).
- Das Berechnen eines Funktionswertes dauert höchstens n Schritte bei n Eingangsvariablen (das kann allerdings bei anderen Varianten unter Umständen mit einem cleveren Algorithmus asymptotisch auch erzielt werden).

Aufgabe 6-05: Binary Decision Diagram

a) Erzeugen Sie das BDD (Binary Decision Diagram) zu der durch folgenden Baum gegebenen Funktion $f : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$:

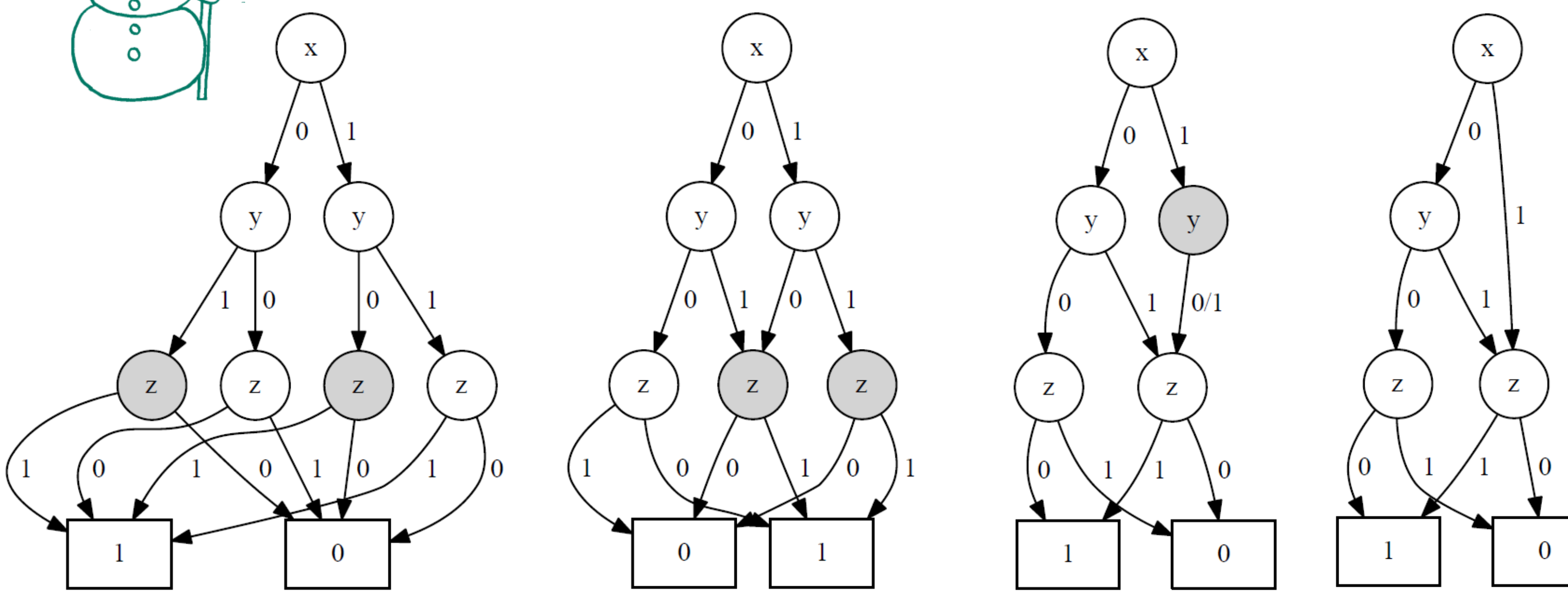


Aufgabe 6-05: Binary Decision Diagram

a) Erzeugen Sie das BDD (Binary Decision Diagram) zu der durch folgenden Baum gegebenen Funktion $f : \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{B}$:

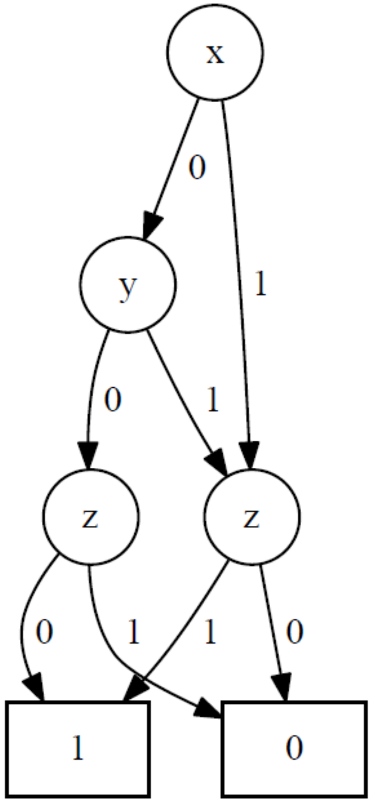
Lösung:

Das BDD ist der **vollständig reduzierte** Funktionsgraph.



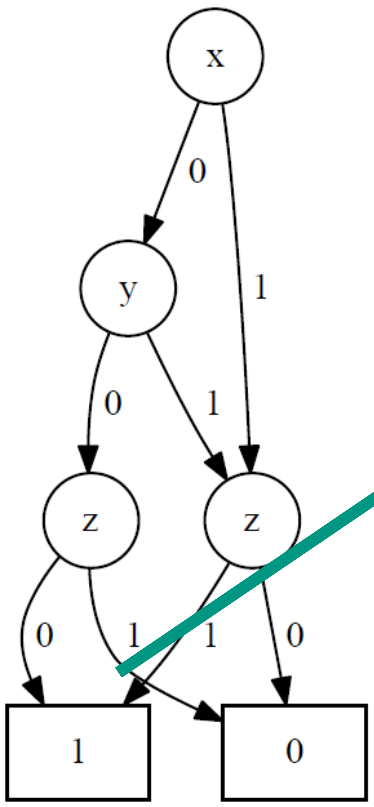
Aufgabe 6-05: Binary Decision Diagram

b) Lesen Sie aus dem berechneten BDD einen Booleschen Ausdruck in disjunktiver Normalform (DNF) ab.



Aufgabe 6-05: Binary Decision Diagram

b) Lesen Sie aus dem berechneten BDD einen Booleschen Ausdruck in disjunktiver Normalform (DNF) ab.



1. $x'y'z'$
2. $x'y\,z$
3. $x \quad z$

$$f(x,y,z) = x'y'z' + x'yz + xz$$

Aufgabe 6-06: von Neumann-Rechner

(a) Nennen Sie die typischen Bestandteile heutiger von Neumann-Rechner.

Aufgabe 6-06: von Neumann-Rechner

(a) Nennen Sie die typischen Bestandteile heutiger von Neumann-Rechner.

Lösung:

Die typischen Funktionseinheiten sind:
Rechenwerk, Speicherwek, Steuerwerk, Ein-/Ausgabewerk (über interne Datenwege (Busse) verbunden)

Aufgabe 6-06: von Neumann-Rechner

(b) Wozu dienen im Allgemeinen die verschiedenen Busse? Skizzieren Sie die Busstruktur.

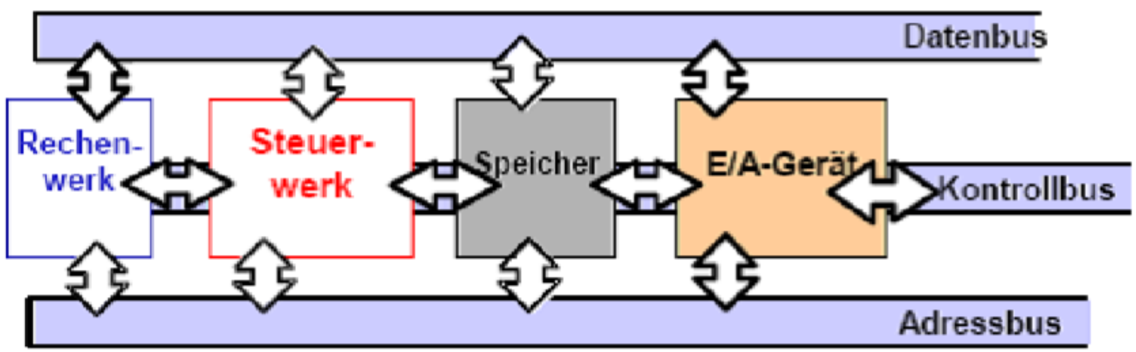
Aufgabe 6-06: von Neumann-Rechner

(b) Wozu dienen im Allgemeinen die verschiedenen Busse? Skizzieren Sie die Busstruktur.

Lösung:

Die Busse dienen zur Übertragung von Daten, Befehlen, Kontroll- und Statusinformationen zwischen den Funktionseinheiten und stellen somit die Voraussetzung für deren Zusammenwirken dar.

Skizze der Busstruktur:



Fragen zu den letzten Heimaufgaben

?

Während die Tutoriumsaufgaben einen Einstieg in ein Thema ermöglichen, dienen die Heimaufgaben dem tieferen Verständnis und insbesondere auch der Klausurvorbereitung

Aufgabe 6-07: Rechenwerk

(a) Das Rechenwerk ist ein Bestandteil der CPU in Computern. Additionswerke sind wiederum grundlegende Teile von Rechenwerken. Erläutern Sie, wie die mathematischen Operationen Subtraktion, Multiplikation und Potenzieren (auf Basis natürlicher Zahlen) auf die Addition zurückgeführt werden können.

In welchen Fällen würde man in einem realen Rechenwerk diese Rückführung auf die Addition nutzen? Begründen Sie.

Aufgabe 6-07: Rechenwerk

(a) Das Rechenwerk ist ein Bestandteil der CPU in Computern. Additionswerke sind wiederum grundlegende Teile von Rechenwerken. Erläutern Sie, wie die mathematischen Operationen Subtraktion, Multiplikation und Potenzieren (auf Basis natürlicher Zahlen) auf die Addition zurückgeführt werden können.

In welchen Fällen würde man in einem realen Rechenwerk diese Rückführung auf die Addition nutzen? Begründen Sie.

Lösung:

Subtraktion: $a - b = a + (-b)$
Multiplikation: $k \cdot n = \underbrace{k + k + ... + k}_{n\text{-mal}}$
Potenzieren: $k^n = \underbrace{k + k + ... + k}_{k^{n-1}\text{-mal}}$

Multiplikation und Potenz würde man direkt berechnen, weil das für die meisten Zahlen sehr viel effizienter geht. Die Differenz wird für Kodierungen, bei denen die Negation leicht zu berechnen ist, tatsächlich auf die Addition zurückgeführt (siehe 1- und 2-Komplement).

Aufgabe 6-08: Schaltfunktion

a) Entwickeln Sie die Schaltfunktion des Halbaddierers als Wahrheitstabelle und Booleschen Ausdruck.

Aufgabe 6-08: Schaltfunktion

a) Entwickeln Sie die Schaltfunktion des Halbaddierers als Wahrheitstabelle und Booleschen Ausdruck.

Lösung:

a und b seien die zu addierenden Bits, s ihre Summe und ü der Übertrag der Addition der beiden Bits.

Wahrheitstabelle:

a	b	s	ü
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Schaltfunktion als Boolescher Ausdruck:
$s = (a \cdot b') + (a' \cdot b) = a \text{ XOR } b = a \oplus b$
$\text{ü} = a \cdot b$

Aufgabe 6-09: Berechenbarkeit

Zeigen Sie, dass nicht jede Funktion berechenbar ist.

Hinweis:

Zeigen Sie, dass die Menge aller Funktionen überabzählbar, die Menge aller berechenbaren Funktionen aber abzählbar ist.

Aufgabe 6-09: Berechenbarkeit

Lösung:

Sei E ein Alphabet.

a) Die Menge aller Funktionen $f : E^* \rightarrow E^*$ ist überabzählbar.

b) Die Menge aller berechenbaren Funktionen $f : E^* \rightarrow E^*$ ist abzählbar.

Folgerung: Nicht jede Funktion ist berechenbar.

Beweis:

a) Ann: Menge F aller Funktionen $f : E^* \rightarrow E^*$ ist abzählbar.
$\Rightarrow F = \{f1, f2, f3, \ldots\}$. Sei $E^* = \{w1, w2, w3, \ldots\}$

Dann lassen sich alle Funktionen mit allen Werten in einer unendlich großen Tabelle darstellen.

Aufgabe 6-09: Berechenbarkeit

	w_1	w_2	w_3	w_4	$\dots$
f_1	$f_1(w_1)$	$f_1(w_2)$	$f_1(w_3)$	$f_1(w_4)$	$\dots$
f_2	$f_2(w_1)$	$f_2(w_2)$	$f_2(w_3)$	$f_2(w_4)$	$\dots$
f_3	$f_3(w_1)$	$f_3(w_2)$	$f_3(w_3)$	$f_3(w_4)$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Definiere Funktion $g : E^* \to E^*$:
Wähle $u, v \in E^*$ mit $\forall i \in \mathbb{N}$:

$$g(w_i) = \begin{cases} u, & falls\ f_i(w_i) \neq u \\ v, & falls\ f_i(w_i) = u \end{cases}$$

Aus F abzählbar folgt: $\exists k \in \mathbb{N} : g = f_k$
$\Rightarrow g(w_i = f_k(w_k)$ nach Definition gilt aber $g(w_k) \neq f_k(w_k)$

$\Longrightarrow$ g kommt nicht in F vor
$\Longrightarrow$ Widerspruch!

Aufgabe 6-09: Berechenbarkeit

b) f mathematisch berechenbar $\Longrightarrow$ Es gibt einen Text endlicher Länge zur Beschreibung eines f mathematisch berechnenden Algorithmus.
Menge aller Wörter (Texte) abzählbar
$\Longrightarrow$ Menge aller berechenbaren Funktionen abzählbar

Aufgabe 6-10: Zahlendarstellung

(a) Geben Sie die Dezimalzahl -21 als Zahl in der 1-Komplement-Darstellung mit 8 Bits an.

Aufgabe 6-10: Zahlendarstellung

(a) Geben Sie die Dezimalzahl -21 als Zahl in der 1-Komplement-Darstellung mit 8 Bits an.

Lösung:

11101010

Aufgabe 6-10: Zahlendarstellung

(b) Geben Sie die Dezimalzahl -21 als Zahl in der 2-Komplement-Darstellung mit 8 Bits an.

Aufgabe 6-10: Zahlendarstellung

(b) Geben Sie die Dezimalzahl -21 als Zahl in der 2-Komplement-Darstellung mit 8 Bits an.

Lösung:

11101011

Aufgabe 6-10: Zahlendarstellung

(c) Geben Sie die Dezimalzahl zu folgender Bitreihe in der IEEE-754-Darstellung mit einfacher Genauigkeit (32 Bits) und $q = 127$ an.
0 10000011 01010101000000000000000

Aufgabe 6-10: Zahlendarstellung

(c) Geben Sie die Dezimalzahl zu folgender Bitreihe in der IEEE-754-Darstellung mit einfacher Genauigkeit (32 Bits) und $q = 127$ an.
0 10000011 01010101000000000000000

Lösung:

$c = 131$
$x = (-1)^0(2^{131-127})(1 + 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-6} + 2^{-8})$
$x = 21,3125$

Aufgabe 6-10: Zahlendarstellung

(d) Welche Bedeutung hat bei der IEEE-754-Darstellung das implizite Bit der Mantisse und warum wird es nicht explizit dargestellt?

Aufgabe 6-10: Zahlendarstellung

(d) Welche Bedeutung hat bei der IEEE-754-Darstellung das implizite Bit der Mantisse und warum wird es nicht explizit dargestellt?

Lösung:

Das implizite Bit stellt die Ziffer vor dem Komma der normierten Gleitpunktzahl dar. In der Dualdarstellung steht dort immer eine 1, daher kann man sich das Belegen dieser Bits sparen.
Eine Ausnahme stellen die denormalisierten Zahlen dar, bei denen auf die Normierung verzichtet wird, um eine größere Gemeinsamkeit in einem bestimmten Zahlenbereich zu erreichen.

Aufgabe 6-11: Huffman-Kodierung

Erzeugen Sie anhand der durch die folgende Zeichenkette gegebenen Häufigkeitsverteilung eine Huffman-Kodierung. (Leerzeichen werden nicht gezählt.)

`Fischers Fritz fischt frische Fische.`

Tragen Sie in folgende Tabelle die ermittelte Häufigkeit der Buchstaben ein und berechnen Sie die Codelänge L und deren Einsparung gegenüber der platzsparendsten Kodierung mit einer festen Codelänge.

Aufgabe 6-11: Huffman-Kodierung

Erzeugen Sie anhand der durch die folgende Zeichenkette gegebenen Häufigkeitsverteilung eine Huffman-Kodierung. (Leerzeichen werden nicht gezählt.)

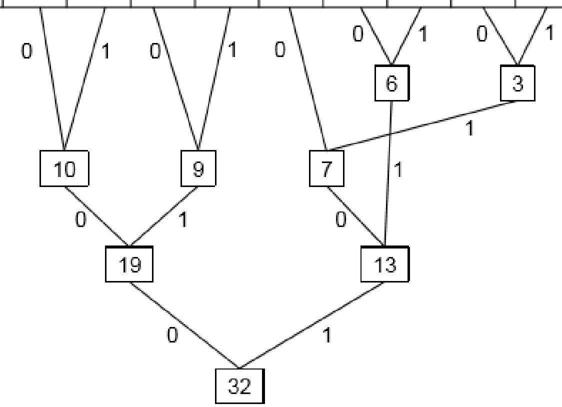
`Fischers Fritz fischt frische Fische.`

Tragen Sie in folgende Tabelle die ermittelte Häufigkeit der Buchstaben ein und berechnen Sie die Codelänge L und deren Einsparung gegenüber der platzsparendsten Kodierung mit einer festen Codelänge.

Lösung:

Anzahl der Zeichen: 32

Buchstabe	F	I	S	C	H	R	E	T	Z
Häufigkeit	5	5	5	4	4	3	3	2	1



Aufgabe 6-11: Huffman-Kodierung

Erzeugen Sie anhand der durch die folgende Zeichenkette gegebenen Häufigkeitsverteilung eine Huffman-Kodierung. (Leerzeichen werden nicht gezählt.)

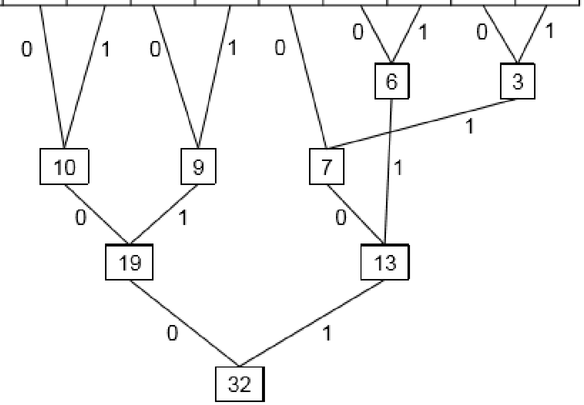
`Fischers Fritz fischt frische Fische.`

Tragen Sie in folgende Tabelle die ermittelte Häufigkeit der Buchstaben ein und berechnen Sie die Codelänge L und deren Einsparung gegenüber der platzsparendsten Kodierung mit einer festen Codelänge.

Lösung:

Anzahl der Zeichen: 32

Buchstabe	F	I	S	C	H	R	E	T	Z
Häufigkeit	5	5	5	4	4	3	3	2	1



Aufgabe 6-11: Huffman-Kodierung

Kodierung:

F	000
I	001
S	010
C	011
H	100
R	110
E	111
T	1010
Z	1011

$$L = \frac{5}{32} \cdot 3 + \frac{5}{32} \cdot 3 + \frac{5}{32} \cdot 3 + \frac{4}{32} \cdot 3 + \frac{4}{32} \cdot 3 + \frac{3}{32} \cdot 3 + \frac{3}{32} \cdot 3 + \frac{2}{32} \cdot 4 + \frac{1}{32} \cdot 4 = 3,09375$$

Einsparnis: $1 - \frac{3{,}09375}{4} = 22,7\%$