Aufgabe 1. ($4 + 4 = 8$ Punkte)

Die Menge der natürlichen Zahlen sei definiert als $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

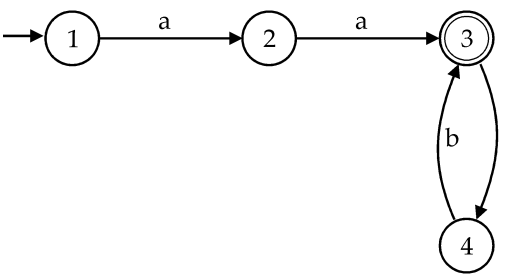
Es sei für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ folgende Sprache L_n gegeben:

$$L_n = \{w \in \{a, b\}^* \mid \exists m \in \mathbb{N} : w = a^n b^{m*n} \}.$$

Es gilt beispielsweise: $a^5b^5, a^5b^{30} \in L_5; a^3b^5 \notin L_3$.

(a) Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm eines endlichen Automaten, der die Sprache L_2 erkennt. Der Automat darf nichtdeterministisch sein.

Lösung: (4 Punkte)



(b) Geben Sie eine rechtslineare Grammatik an, die L_3 produziert.

Hinweis: Die Grammatik muss vollständig definiert sein, es reicht nicht, die Produktionen aufzulisten.

Lösung: (4 Punkte)

$$\begin{aligned}
G &= (N, T, P, A_1) \text{ mit} \\
N &= \{A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3\} \\
T &= \{a, b\} \\
P = \{A_1 &\to aA_2 \\
A_2 &\to aA_3 \\
A_3 &\to aB_1 \\
B_1 &\to bB_2 | \lambda \\
B_2 &\to bB_3 \\
B_3 &\to bB_1\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. (7 Punkte)

Die Menge der natürlichen Zahlen sei definiert als $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

Gegeben sei die folgende Sprache L:

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \exists m, n \in \mathbb{N} : w = a^n b^{m*n} \}.$$

Zeigen Sie mithilfe des entsprechenden Pumping-Lemmas, dass L nicht regulär ist.

Geben Sie dafür zunächst an, wie dieses Pumping-Lemma definiert ist, und wenden Sie es dann auf die Sprache L an.

Lösung:

Anmerkung: Die Konstante des Pumping-Lemmas kann auch mit n bezeichnet werden. Die Bezeichnung ist dann zwar doppelt verwendet, aber das ist ok.

Definition (Pumping-Lemma für EA-Sprachen):

Gegeben: $A = (E, S, \delta, s_0, F)$ mit $|S| = N \in \mathbb{N}$.
Dann gibt es für jedes Wort $w \in L(A)$ mit $|w| \geq N$ Wörter $x, y, z \in E^*$, so dass $w = xyz$ und es gilt:

(a) $|xy| \leq N$,

(b) $|y| \geq 1$,

(c) $\forall i \in \mathbb{N}_0 : xy^iz \in L(A)$.

Beweis:

Sei N die Konstante aus dem Pumping-Lemma und $w = a^N b^N$. Dann ist $w \in L$ und $|w| \geq N$, d. h. es gilt: $w = xyz$ mit $|xy| \leq N$ und $|y| \geq 1$.
y enthält also mindestens ein a und sicher keine bs.
Das Wort xy^2z kann nicht Element von L sein, da es darin mehr as als bs gibt (und die Anzahl der bs i. A. nicht 0 ist).

Achtung: Man kann hier nicht ohne weiteres mit xy^0z argumentieren (wie bspw. bei der Sprache „$a^n b^n$“), da hier durch Weglassen von as doch wieder ein Wort aus L entstehen könnte.

Aufgabe 3. $(3 + 4 = 7$ Punkte$)$

Gegeben sei der nichtdeterministische Kellerautomat $K = (E, S, K, \delta, s_0, k_0, \{s_1\})$ mit

$$
\begin{array}{ll}
E = & \{(,)\} \\
S = & \{s_0, s_1\} \\
K = & \{[, k_0\}
\end{array}
$$

und δ :

$$
\begin{array}{lcl}
(s_0, (, k_0) & \rightarrow & (s_0, [k_0) \\
(s_0, (, [) & \rightarrow & (s_0, [[) \\
(s_0,), [) & \rightarrow & (s_0, \lambda) \\
(s_0, \lambda, k_0) & \rightarrow & (s_1, \lambda)
\end{array}
$$

(a) Kreuzen Sie von den folgenden Wörter genau die an, die Eingabewörter sind und von K erkannt werden. Sie erhalten bei dieser Aufgabe Punkte für richtig gesetzte Kreuze und Abzüge für falsch gesetzte Kreuze. Sie können in diesem Aufgabenteil jedoch nicht weniger als 0 Punkte erzielen.

○ (())	○ (()	○))((	○λ
○ [()()()]	○ [[]	○ ()()()	○))

Lösung:

⊗ (())	○ (()	○))((	⊗ λ
○ [()()()]	○ [[]	⊗ ()()()	○))

(b) Geben Sie eine Grammatik für $L(K)$ an.

Hinweis: Die Grammatik muss vollständig definiert sein, es reicht nicht, die Produktionen aufzulisten.

Lösung:
$G = (\{S\}, \{(,)\}, P, S)$ und $P = \{S \rightarrow (S)|SS|\lambda\}$

Aufgabe 4. ($4 + 3 = 7$ Punkte)

(a) Wenn ein Problem A NP-vollständig ist, hat es zwei wesentliche Eigenschaften. Geben Sie diese Eigenschaften an und erklären Sie kurz (evtl. mit Grafik), wie man sie nachweisen kann.

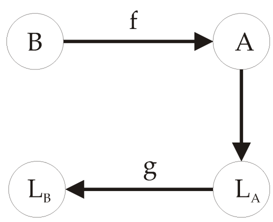
Lösung: (Umgsprachliche, aber präzise Formulierungen auch ok)

(1) $A \in NP$.

Nichtdet. TM kann Lösung raten und in Polynomialzeit verifizieren, dass sie stimmt. (2 Punkte)

(2) $\forall B \in NP : B \leq_P A$.

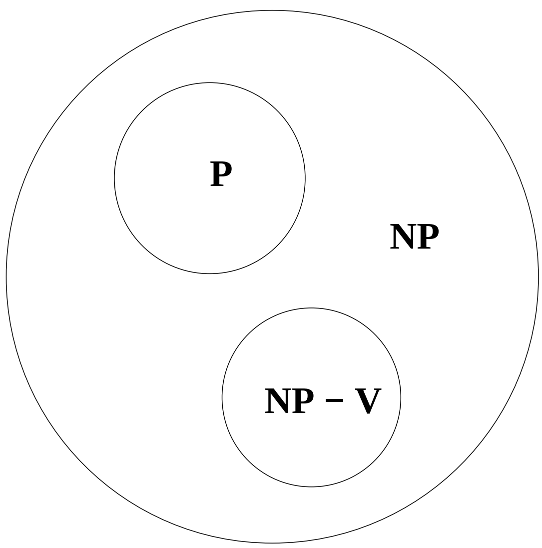
Man nimmt ein Problem B, von dem man weiß, dass es NP-vollständig ist und zeigt, dass man es in Pol.-Zeit auf A reduzieren kann. Seien dazu f, g in Pol.-Zeit berechenbare Funktionen:



(2 Punkte)

(b) In welcher Beziehung zueinander stehen nach heutigem Wissen die Klassen P, NP und NP-*vollständig*? Zeichnen Sie ein Diagramm.

Lösung (3 Punkte)

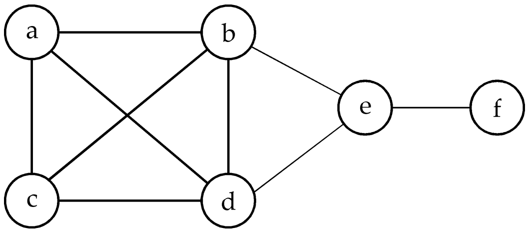


Aufgabe 5. $(4 + 3 = 7$ Punkte)

In der Vorlesung wurde das Problem $CLIQUE$ vorgestellt.

Es bezeichnet die folgende Fragestellung: Sei $G = (V, E)$ ein (ungerichteter) Graph mit der Knotenmenge V und der Kantenmenge E; sei $k \geq 0$ eine natürliche Zahl; gibt es in G mindestens k Knoten, die paarweise durch eine Kante verbunden sind, also eine „Clique" bilden?

Zum Beispiel bilden im abgebildeten Graphen die Knoten a, b, c und d die größte Clique mit $k = 4$.



Formal:

$$CLIQUE = \{(G, k) \mid \exists\, V' \subseteq V \text{ mit } |V'| = k : \ \forall\, v_1, v_2 \in V' : \ (v_1, v_2) \in E\}.$$

(a) Es sei bereits bekannt, dass für jedes Problem $A \in NP$ gilt:

$$A \leq_P CLIQUE.$$

Zeigen Sie: $CLIQUE$ ist NP-vollständig.

Lösung:

Zu zeigen bleibt: $CLIQUE \in NP$. Eine nichtdeterministische TM kann eine Menge $V' \subseteq V$ raten und in Polynomialzeit verifizieren, dass alle Knoten aus V' paarweise durch eine Kante verbunden sind.

(b) Sei $|G|$ die Anzahl der Knoten eines Graphen G. Begründen Sie, warum das folgende Problem $CLIQUE_{EINFACH}$ in P liegt:

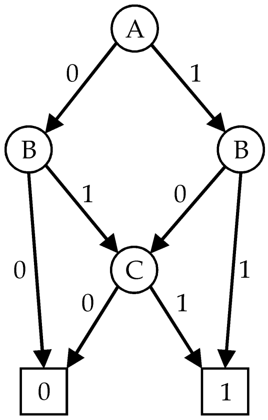
Sei G ein Graph wie vorher. $CLIQUE_{EINFACH}(G) = CLIQUE(G, |G|)$.

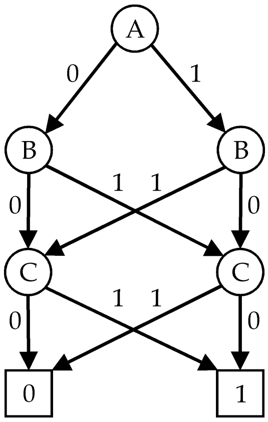
Lösung: Man muss nur überprüfen, ob es zwei Knoten im Graphen gibt, die nicht verbunden sind. Das geht in Linearzeit (überprüfe, ob $|E| = |V|(|V| - 1)/2$).

Aufgabe 6. $(3 + 2 + 1 + 4 = 10$ Punkte)

Die Booleschen Funktionen $f_1 : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ und $f_2 : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ seien jeweils durch ein Binary Decision Diagram (BDD) gegeben.

BDD für f_1 : BDD für f_2 :





A	B	C	f_1	f_2	$f_1 \wedge \neg f_2$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

(a) Tragen Sie die Funktionswerte für f_1 und f_2 in die entsprechenden Spalten der Wahrheitstabelle ein.

Lösung: s. o.

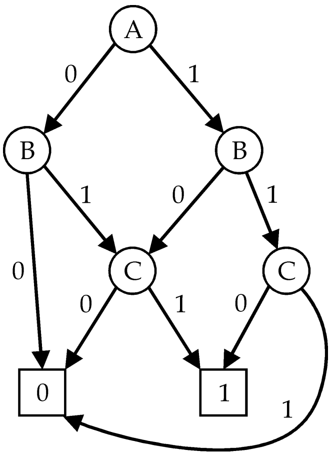
(b) Wie lautet der aus der Vorlesung bekannte Name für das Schaltnetz $\mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}^2$, das durch f_1 und f_2 definiert wird?

Lösung: Volladdierer: f_1 ist Übertrag, f_2 ist Summenbit.

(c) Tragen Sie in die verbliebene Tabellenspalte die Funktionswerte der zusammengesetzten Funktion $f_1 \wedge \neg f_2$ ein.

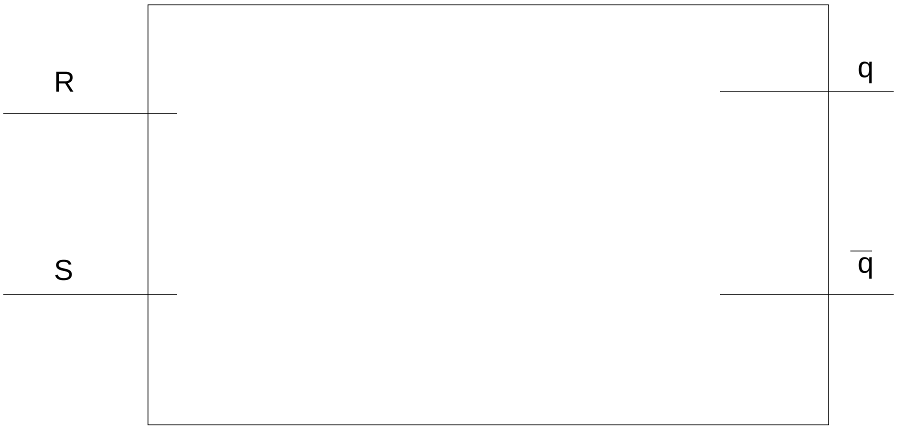
Lösung: s. o.

(d) Zeichnen Sie ein BDD für die Funktion $f_1 \wedge \neg f_2$ mit derselben Variablenreihenfolge wie in den vorgegebenen BDDs.



Aufgabe 7. $(3 + 3 + 1 = 7$ Punkte)

(a) Zeichnen Sie das Schaltwerk eines RS-Flipflops.



(b) Wie kann man eine Information nur zu frei bestimmbaren Zeitpunkten in das Flipflop übernehmen? Zeichnen Sie das Schaltwerk. Dabei kann das Flipflop aus (a) als Baustein verwendet werden.

(c) Was ist der wesentliche Unterschied zwischen RS- und JK-Flipflops?

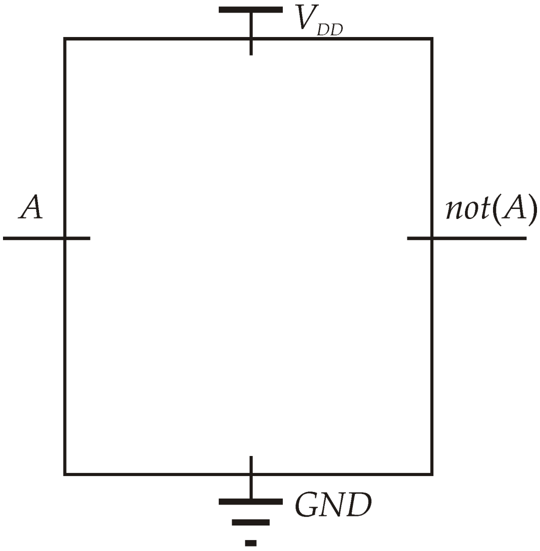
Aufgabe 8. $(5 + 5 + 2 = 12$ Punkte)

Gegeben seien die Booleschen Funktionen $not : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ und $nand : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ mit:

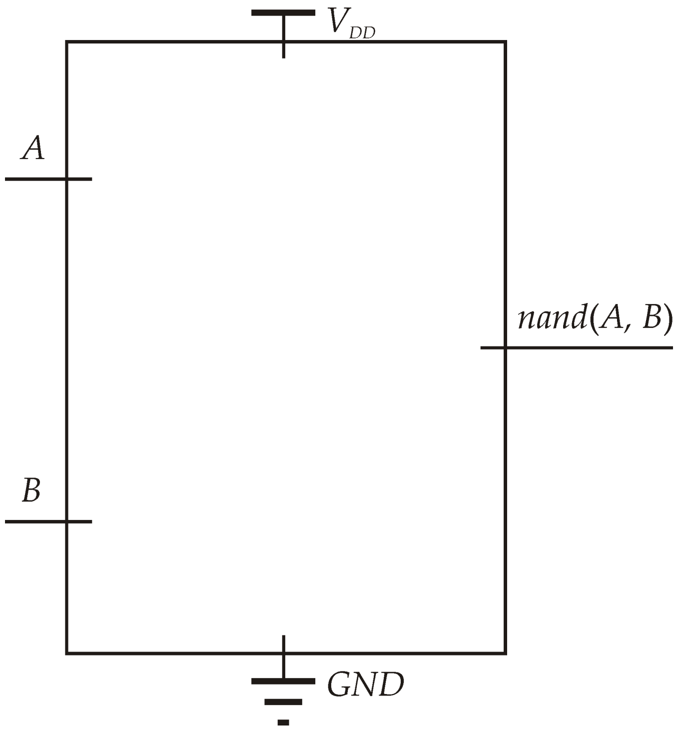
$$\begin{aligned} not(A) &= \neg A, \\ nand(A, B) &= \neg(A \wedge B). \end{aligned}$$

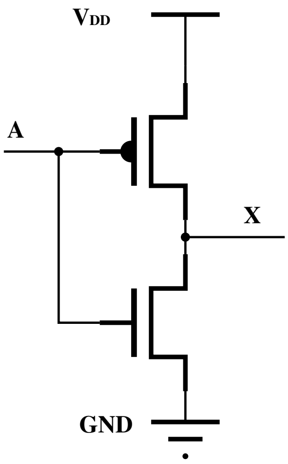
(a) Zeichnen Sie zwei CMOS-Schaltungen, die *not* bzw. *nand* realisieren.

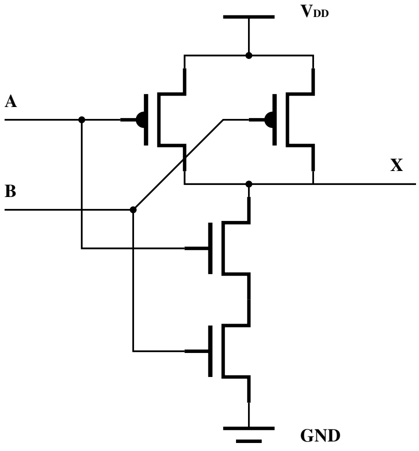
not



nand







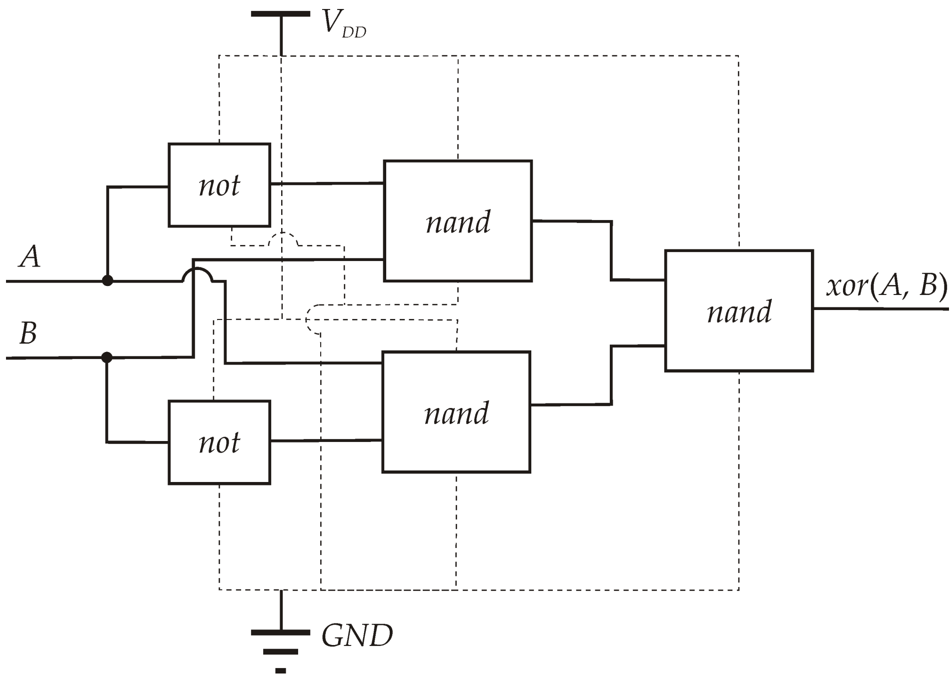
(b) Benutzen Sie (nur!) die beiden CMOS-Bausteine *not* und *nand* aus Teil (a) (möglicherweise mehrfach), um die folgende Funktion $xor : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ als CMOS-Schaltung zu realisieren:

$$xor(A, B) = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B).$$

Hinweise:

- Sie dürfen die Bausteine auch verwenden, wenn Sie Teil (a) nicht gelöst haben.
- Benutzen Sie die Bausteine als „Blackboxen“; die innere Verdrahtung müssen Sie nicht erneut zeichnen.

Lösung



(c) Begründen Sie, warum man auf den *not*-Baustein prinzipiell auch verzichten könnte. **Lösung:** $not(A) = nand(A, A)$

Aufgabe 9. ($1 + 2 + 4 = 7$ Punkte)

Für ein Alphabet A sei $c : A \to \mathbb{B}^8$ eine Blockcodierung. Es seien $x, y, z \in c(A)$ die einzigen Codewörter mit $x = x_1 \cdots x_8$, $y = y_1 \cdots y_8$ und $z = z_1 \cdots z_8$. Für die Hammingabstände h zwischen x, y und z gelte:

$$h(x, y) = 3$$
$$h(y, z) = 4$$
$$h(x, z) = 6$$

(a) Berechnen Sie die Hammingzahl des Codes.

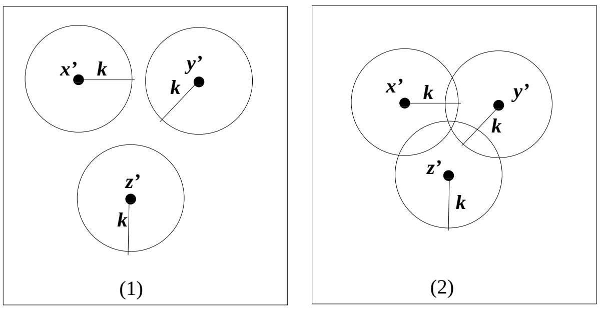
Lösung: Hammingzahl: 3

(b) Wie viele fehlerhafte Bits sind in dieser Codierung *erkennbar* bzw. *korrigierbar*?

Erkennbar: **Lösung:** 2

Korrigierbar: **Lösung:** 1

(c) Die Codewörter x', y', z' seien räumlich angeordnet.



(1) (2)

Welche Aussagen sind zutreffend?

wahr	falsch	
○	○	Die Codierung in (1) ist k-Fehler-erkennbar und k-Fehler-korrigierbar.
○	○	Die Codierung in (2) ist k-Fehler-korrigierbar.

Lösung

wahr	falsch	
⊗	○	Die Codierung in (1) ist k-Fehler-erkennbar und k-Fehler-korrigierbar.
○	⊗	Die Codierung in (2) ist k-Fehler-korrigierbar.

Aufgabe 10. $(2+1+1+2=6$ Punkte)

Gegeben sei die folgende IEEE 754-ähnliche Darstellung von Gleitpunktzahlen in 8 Bit:

v	$\mathbf{c_2}$	$\mathbf{c_1}$	$\mathbf{c_0}$	$\mathbf{m_3}$	$\mathbf{m_2}$	$\mathbf{m_1}$	$\mathbf{m_0}$

v bezeichne das Vorzeichenbit, $c_2 \dots c_0$ die Charakteristik und $1.m_3 \dots m_0$ die Mantisse der Gleitpunktzahl.
Abweichend von IEEE 754 gebe es keine denormalisierten Zahlen und der einzige spezielle Wert sei die 0, wenn in Mantisse und Charakteristik alle Bits 0 sind.

Hinweis: Sie müssen in dieser Aufgabe keine Dezimalzahlen berechnen, es reicht, eine Darstellung als Gleitpunktzahl anzugeben.

(a) Bestimmen Sie die größtmögliche positive Zahl in dieser Darstellung.

Lösung
$01111111_{gpz} = 31_{10}$

(b) Bestimmen Sie die kleinstmögliche (betragsmäßig größte negative) Zahl in dieser Darstellung.

Lösung
$11111111_{gpz} = -31_{10}$

(c) Bestimmen Sie die kleinstmögliche positive von Null verschiedene Zahl in dieser Darstellung.

Lösung
$00000001_{gpz} = 0,1328125_{10}$

(d) Wandeln sie die Zahl $z = 5,75$ in diese Gleitkommadarstellung um.

Lösung
$5,75_{10} = 01010111_{gpz}$

Aufgabe 11. ($2 + 4 = 6$ Punkte)

Gegeben sei eine 4-stufige Pipeline mit den Ausführungsstufen:

(F) Befehl holen,

(D) Entschlüsseln,

(O) Operand holen und

(E) Ausführen.

(a) Wie viele Taktzyklen dauert die Ausführung von 7 Befehlen? Nehmen Sie an, dass jeder Befehl genau einen Taktzyklus in jeder Stufe der Pipeline verweilt und keine Konflikte auftreten.

Lösung:
$7 + 3 = 10$

F	D	O	E
1	-	-	-
2	1	-	-
3	2	1	-
4	3	2	1
5	4	3	2
6	5	4	3
7	6	5	4
-	7	6	5
-	-	7	6
-	-	-	7
-	-	-	-

(b) Wie viele Taktzyklen dauert die Ausführung aus (a), wenn der dritte Befehl ein Sprungbefehl ist?

Lösung:
$7 + 3 + 3 = 13$

F	D	O	E
1	-	-	-
2	1	-	-
3	2	1	-
-	3	2	1
-	-	3	2
-	-	-	3
4	-	-	-
5	4	-	-
6	5	4	-
7	6	5	4
-	7	6	5
-	-	7	6
-	-	-	7
-	-	-	-

Aufgabe 12. (6 Punkte)
Kreuzen Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für falsche Kreuze wird Ihnen jeweils ein Punkt abgezogen. Sie können jedoch nicht weniger als 0 Punkte in dieser Aufgabe erzielen.

	wahr	falsch
Daisy Chain wird zur zentralen Steuerung eines Datenbusses gebraucht.	○	○
Ein Nachteil des Assoziativspeichers ist, dass der Zugriff auf beliebig große Speicher sehr teuer ist.	○	○
Die SIMD-Rechnerarchitektur setzt sich aus n Steuerwerken, n Rechenwerken, einem Verbindungsnetz und n Speichern zusammen.	○	○
Möchte man sicherstellen, dass Datenpakete vom Sender zum Empfänger verlässlich übertragen werden, so nutzt man das User Datagram Protocol.	○	○
Der Cell-Prozessor kann ausschließlich in Spieleanwendung eingesetzt werden.	○	○
Round Robin ist ein prioritätsgestütztes Zuteilungsverfahren.	○	○

Lösung:

	wahr	falsch
Daisy Chain wird zur zentralen Steuerung eines Datenbusses gebraucht.	○	⊗
Ein Nachteil des Assoziativspeichers ist, dass der Zugriff auf beliebig große Speicher sehr teuer ist.	⊗	○
Die SIMD-Rechnerarchitektur setzt sich aus n Steuerwerken, n Rechenwerken, einem Verbindungsnetz und n Speichern zusammen.	○	⊗
Möchte man sicherstellen, dass Datenpakete vom Sender zum Empfänger verlässlich übertragen werden, so nutzt man das User Datagram Protocol.	○	⊗
Der Cell-Prozessor kann ausschließlich in Spiele-Anwendung eingesetzt werden.	○	⊗
Round Robin ist ein prioritätsgestütztes Zuteilungsverfahren.	○	⊗