Lösung

Aufgabe 1. (Sprachklassen)

Hinweis: Diese Aufgabe gilt als gelöst, wenn Sie mindestens zwei der drei Teilaufgaben korrekt beantwortet haben.

Gegeben sei für $E = \{a, b, c\}$ die Sprache $L = \{a^m b^n c^{m+n} \in E^\star \mid m, n \in \mathbb{N}_0\}$.

Es gilt also bspw.:

- $\lambda, ac, aacc, bc, bbcc, abcc, aabccc, aabbbccccc \in L$;
- $a, b, c, ab, acc, abc, aabbbcc \notin L$.

(a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (N, T, P, S)$ an, sodass gilt: $L(G) = L$.

Lösung:

$G = (\{S, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$

mit

$P = \{S \to aSc \mid B, B \to bBc \mid \lambda\}$

(b) Zeigen Sie mithilfe des Pumping-Lemmas für EA-Sprachen, dass es keinen endlichen Automaten gibt, der die Sprache L erkennt.

Lösung: Angenommen, L wäre durch einen endlichen Automaten mit n Zuständen erkennbar. Betrachte das Wort $w = a^n b^n c^{2n} \in L$ mit $|w| = 4n \geq n$.

Nach dem PPL existiert eine Zerlegung $w = xyz$ mit:

(1) $|xy| \leq n$,

(2) $|y| \geq 1$,

(3) $\forall i \in \mathbb{N}_0 : xy^i z \in L$.

Es muss nun wegen (1) und (2) gelten: $xy = a^j$ und $y = a^k$ d.h. $x = a^{j-k}$ und $z = a^{n-j} b^n c^{2n}$ für $j, k \leq n$, d.h. $\exists k \in \{1, 2, \ldots\} : y = a^k$.

Das führt aber (mit (3) und Pumpvariable $i = 0$) dazu, dass $xy^0 z = a^{j-k} a^{n-j} b^n c^{2n} = a^{n-k} b^n c^{2n} \notin L$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass L durch einen endlichen Automaten erkennbar sei, und wir müssen diese aufgeben.

(c) Kreuzen Sie an, zu welchen Sprachklassen der Chomsky-Hierarchie L nach den Ergebnissen aus (a) und (b) gehört:

☒ Typ 0

☒ Typ 1

☒ Typ 2

☐ Typ 3

Zu beachten: Typ 0 $\supset$ Typ 1 $\supset$ Typ 2 $\supset$ Typ 3.

Aufgabe 2. (Kellerautomaten)

Gegeben sei wieder für $E = \{a, b, c\}$ die Sprache $L = \{a^m b^n c^{m+n} \in E^\star \mid m, n \in \mathbb{N}_0\}$.

Geben Sie einen deterministischen Kellerautomaten $KA = (E, S, K, \delta, s_0, k_0, F)$ an mit $L(KA) = L$. Zeigen Sie, dass Ihr Kellerautomat das Testwort *aacc* akzeptiert.

Lösung:

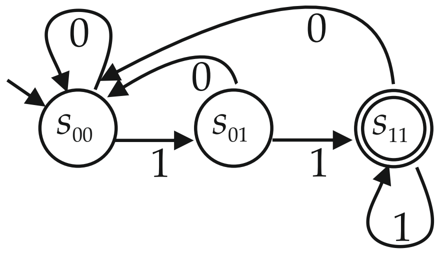
$$
\begin{aligned}
&KA = (\{a, b, c\}, \{s_0, s_1, s_2, s_3\}, \{k_0, a, b\}, \delta, s_0, k_0, \{s_0, s_3\}).\\
&\quad \delta :\\
&\qquad \delta(s_0, a, k_0) = (s_1, ak_0)\\
&\qquad \delta(s_0, b, k_0) = (s_1, bk_0)\\
&\qquad \delta(s_1, a, a) = (s_1, aa)\\
&\qquad \delta(s_1, b, a) = (s_1, ba)\\
&\qquad \delta(s_1, b, b) = (s_1, bb)\\
&\qquad \delta(s_1, c, a) = (s_2, \lambda)\\
&\qquad \delta(s_1, c, b) = (s_2, \lambda)\\
&\qquad \delta(s_2, c, a) = (s_2, \lambda)\\
&\qquad \delta(s_2, c, b) = (s_2, \lambda)\\
&\qquad \delta(s_2, \lambda, k_0) = (s_3, k_0)
\end{aligned}
$$

Erkennung des Testwortes *aacc*:

$$
\begin{aligned}
&(s_0, aacc, k_0) \vdash (s_1, acc, ak_0) \vdash (s_1, cc, aak_0) \vdash (s_2, c, ak_0) \vdash\\
&(s_2, \lambda, k_0) \vdash (s_3, \lambda, k_0)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3. (Schaltwerke)

Gegeben sei der endliche Automat (EA) $A = (\{0,1\}, \{s_{00}, s_{01}, s_{11}\}, \delta, s_{00}, \{s_{11}\})$ mit δ:



Ergänzen Sie das folgende unvollständige Schaltwerk so, dass es die Funktionsweise des EA A implementiert, d. h. dass genau dann eine 1 am Ausgang a anliegt, wenn sich der EA A nach Eingabe des über e erhaltenen Wortes im Endzustand befindet. Das ist immer dann der Fall, wenn die letzten beiden Bits der Eingabe 1 waren.

Hinweise:

- Die Zustände des EA A werden durch Zustände der beiden RS-Flipflops des Schaltwerks simuliert.
- T kennzeichnet den Takt des Schaltwerks.

Lösung: