Aufgabe 1. Pumping-Lemma für EA-Sprachen

Gegeben sei die Sprache

$$L = \{a^{2^i} \mid i \in \mathbb{N}_0\}.$$

Es gilt also $a, aa, aaaa, aaaaaaaa, \ldots \in L$ und bspw. $\lambda, aaa, aaaaaa \notin L$.

Zeigen Sie mithilfe des Pumping-Lemmas für EA-Sprachen, dass L nicht vom Chomsky-Typ 3 ist.

Lösung:

- Angenommen, es existiert ein EA mit n Zuständen, der L akzeptiert.
- Sei $w = a^{2^n} \in L$ mit $|w| = 2^n \geq n$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
- Laut PPL existieren x, y, z mit $w = xyz$ und
  (a) $|xy| \leq n$,
  (b) $|y| \geq 1$ und
  (c) $\forall i \in \mathbb{N}_0 : xy^i z \in L$.
- Sei also $xy = a^k, y = a^l, x = a^{k-l}, z = a^{2^n-k}$.
- Nach (3) sollte mit $i = 2$ gelten:

  $$w' = \underbrace{a^{k-l}}_{x} \underbrace{a^{2l}}_{2y} \underbrace{a^{2^n-k}}_{z} = a^{2^n+l} \in L \text{ mit } |w'| = 2^n + l.$$

  Das ist aber ein Widerspruch: nach (1) und (2) gilt $1 \leq l \leq n$, also auch:

  $$2^n < 2^n + l < 2^{n+1}.$$

  Damit gilt $|w'| = a^{2^n+l} \notin L$ (denn $2^n + l$ ist keine Zweierpotenz).

  (Begründung analog zu Heim-Übungsblatt 1, Aufgabe 4(a).)
- Da wir zu einem Widerspruch gekommen sind, muss die Annahme, L sei von einem EA erkennbar, falsch sein.

Aufgabe 2. Grammatiken

Gegeben sei die Sprache

$$L = \{a^m b^{m-n} c^n \mid m, n \in \mathbb{N}_0, m \geq n\}.$$

Es gilt also bspw. $\lambda, ab, ac, aabc, aaaccc, aaabbc, aaaaabcccc \in L$, $a, aacb, bcaa, aaabc \notin L$.

Geben Sie eine kontextsensitive oder monotone Grammatik für L an. Definieren Sie die Grammatik vollständig.

Hinweis: Die Grammatik kann bspw. ein Nonterminal als Platzhalter für die $b's$ und $c's$ nutzen, das durch nicht-kontextfreie Regeln in die Terminale b und c in der richtigen Reihenfolge umbenannt wird.

Lösung:
1. Variante: Direkte Angabe einer monotonen (und kontextsensitiven) Grammatik.

$$\begin{aligned}
G &= (\{S, A, D, E\}, \{a, b, c\}, P, S)\\
P &= \{S \to D \mid \lambda,\\
&\quad D \to aDE \mid aE,\\
&\quad aE \to ab \mid ac, (ac \text{ für Wörter } a^m c^m)\\
&\quad bE \to bb \mid bc,\\
&\quad cE \to cc\}
\end{aligned}$$

2. Variante: Angabe einer kontextfreien Grammatik, die anschließend λ-frei gemacht wird.

$$\begin{aligned}
G_1 &= (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b, c\}, P_1, S)\\
P_1 &= \{S \to ASC \mid ADB \mid \lambda,\\
&\quad D \to ADB \mid \lambda,\\
&\quad A \to a,\\
&\quad B \to b,\\
&\quad C \to c\}
\end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned}
G_2 &= (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b, c\}, P_2, S)\\
P_2 &= \{S \to ASC \mid ADB \mid \lambda \mid AB,\\
&\quad D \to ADB \mid AB,\\
&\quad A \to a,\\
&\quad B \to b,\\
&\quad C \to c\}
\end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned}
G_3 &= (\{S', S, A, B, C, D\}, \{a, b, c\}, P_3, S') \\
P_3 &= \{S' \rightarrow S \mid \lambda, \\
&\qquad S \rightarrow ASC \mid ADB \mid AB \mid AC, \\
&\qquad D \rightarrow ADB \mid AB, \\
&\qquad A \rightarrow a, \\
&\qquad B \rightarrow b, \\
&\qquad C \rightarrow c\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Binary Decision Diagram (BDD)

Gegeben sei die Boolesche Funktion

$$f : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B} : f(x, y, z) = (x \text{ XOR } z) \cdot (x' + y)\,.$$

Geben Sie für f ein Binary Decision Diagram mit der Variablenreihenfolge $x \to y \to z$ an.

Bemerkung: Die abgebildete Tabelle können Sie für Ihren Lösungsweg nutzen, sie wird aber nicht bewertet.

Lösung:

x	y	z	f	$x \oplus z$	$x' + y$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1