Karlsruher Institut für Technologie

aifb
Institut für Angewandte Informatik
und Formale Beschreibungsverfahren

19.01.2013

Lösung zur Bonusklausur über den Stoff der Vorlesung „Grundlagen der Informatik II“ (45 Minuten)

Name: ____________________ Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________ Semester: __________ (WS 2012/13)

Ich bestätige, dass ich die folgenden Angaben gelesen und mich von der Vollständigkeit dieses Klausurexemplars überzeugt habe (Seiten 1-6).

____
Unterschrift des o. g. Klausurteilnehmers bzw. der o. g. Klausurteilnehmerin

Anmerkungen:

1. Legen Sie bitte Ihren Studierendenausweis bereit.
2. Bitte tragen Sie **Name**, **Vorname** und **Matr.-Nr.** deutlich lesbar ein.
3. Die folgenden **3 Aufgaben** sind vollständig zu bearbeiten.
4. Folgende Hilfsmittel sind zugelassen: **keine.**
5. Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur.
6. Unleserliche oder mit Bleistift geschriebene Lösungen können von der Klausur bzw. Wertung ausgeschlossen werden.
7. Die Bearbeitungszeit beträgt 45 Minuten.

Nur für den Prüfer :

1	2	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	gesamt

Aufgabenübersicht

Aufgabe 1

2013-B-01 **Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen**

Zeigen Sie mithilfe des Pumping-Lemmas, dass die Sprache

$$L = \{a^k b^l c^m \mid k < l < m\}$$

nicht kontextfrei ist.

Lösung:
Angenommen, L sei kontextfrei, dann existiert eine Konstante $n \in \mathbb{N}$, sodass $\forall$ Wörter $z = a^k b^l c^m \in L$ mit $k < l < m$ mit $|z| \geq n$ eine Zerlegung $z = uvwxy$ existiert, für die gilt:

(a) $|vwx| \leq n$,

(b) $|vx| \geq 1$ und

(c) $\forall i \in \mathbb{N}_0 : uv^i wx^i y \in L$.

Im Folgenden wird gezeigt, dass ein Wort z existiert, so dass für alle Zerlegungen $z = uvwxy$ ein $i \in \mathbb{N}_0$ existiert, für welches unter der Annahme von (a) und (b) gilt: $uv^i wx^i y \notin L$.

Betrachte man nun das Wort $z = a^n b^{n+1} c^{n+2}$. Wegen (a) $|vwx| \leq n$ und (b) $|vx| \geq 1$ können v und x mindestens eins und maximal zwei verschiedene Zeichen aus $\{a, b, c\}$ enthalten. Es werden folgende Fälle unterschieden:

(a) v und x enthalten genau zwei verschiedene Zeichen:

  (1) a und b: vx enthält somit kein c. Jedes $uv^i wx^i y$ mit $i \geq 2$ ist dann nicht in der Sprache, weil $|uv^i wx^i y|_a > |uv^i wx^i y|_c - 2$ oder $|uv^i wx^i y|_b - 1 > |uv^i wx^i y|_c - 2$.

  (2) b und c: vx enthält somit kein a. Jedes $uv^i wx^i y$ mit $i = 0$ ist dann nicht in der Sprache, weil $|uv^i wx^i y|_c - 2 < |uv^i wx^i y|_a$ oder $|uv^i wx^i y|_b - 1 < |uv^i wx^i y|_a$.

(b) v und x enthalten genau ein Zeichen:

  (1) a: vx enthält somit kein b und kein c. Jedes $uv^i wx^i y$ mit $i \geq 2$ ist dann nicht in der Sprache, weil $|uv^i wx^i y|_a > |uv^i wx^i y|_c - 2$ oder $|uv^i wx^i y|_a > |uv^i wx^i y|_b - 1$.

  (2) b: vx enthält somit kein a und kein c. Jedes $uv^i wx^i y$ mit $i = 0$ ist dann nicht in der Sprache, weil $|uv^i wx^i y|_b - 1 < |uv^i wx^i y|_a$ oder jedes $uv^i wx^i y$ mit $i \geq 2$ ist dann nicht in der Sprache, weil $|uv^i wx^i y|_b - 1 > |uv^i wx^i y|_c - 2$.

  (3) c: vx enthält somit kein a und kein b. Jedes $uv^i wx^i y$ mit $i = 0$ ist dann nicht in der Sprache, weil $|uv^i wx^i y|_c - 2 < |uv^i wx^i y|_a$ oder $|uv^i wx^i y|_c - 2 < |uv^i wx^i y|_b - 1$.

Daraus folgt ein Widerspruch, denn laut Pumping-Lemma sollte jedes gepumpte Wort ebenfalls in L liegen. Also müssen wir die ursprüngliche Annahme aufgeben, dass L eine kontextfreie Sprache ist.

Bemerkung: Achten Sie hier darauf, dass die gepumpten Wörter nicht Element der Sprache L sein dürfen. Es ist nicht ausreichend zu zeigen, dass die gepumpten Wörter nicht mehr der Struktur des gewählten Wortes w entsprechen.

Aufgabe 2

2013-B-02 **Kellerautomat**

Gegeben sei folgende Sprache L

$$L = \{u\#v \mid u, v \in \{a, b\}^\star,\quad u = a^i b^n a^k, v = a^l b^n a^m;\quad i < m;\quad k < l;\quad i, k, l, m, n \geq 1\}.$$

Es gilt beispielsweise

$$ab^3a\#a^4b^3a^6\ ,\ a^2ba^2\#a^7ba^5 \in L;$$
$$ab\#ab\ ,\ a^8ba^7\#aba\ ,\ ab^5a\#a^6b^2a^7 \notin L.$$

L ist also die Sprache aller Wörter w, die, getrennt durch #, aus zwei Teilen der Form $a^\star b^\star a^\star$ bestehen, also $w = u\#v$. Dabei ist die Anzahl der b's in beiden Teilen gleich und die Anzahl der a's **vor** dem b in u kleiner als die Anzahl der a's **nach** dem b in v und die Anzahl der a's **nach** dem b in u kleiner als die Anzahl der a's **vor** dem b in v.

Geben Sie einen deterministischen Kellerautomaten $KA = (E, S, K, \delta, s_0, k_0, F)$ mit $L(KA) = L$ an. Geben Sie KA vollständig an.

Lösung:

$$KA = (\{a, b, \#\}, \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}, \{k_0, a, b\}, \delta, s_0, k_0, \{s_5\})$$

δ :

$$
\begin{aligned}
\delta(s_0, a, k_0) &= (s_0, ak_0)\\
\delta(s_0, a, a) &= (s_0, aa)\\
\delta(s_0, b, a) &= (s_0, ba)\\
\delta(s_0, b, b) &= (s_0, bb)\\
\delta(s_0, a, b) &= (s_1, ab)\\
\delta(s_1, a, a) &= (s_1, aa)\\
\delta(s_1, \#, a) &= (s_2, a)\\
\delta(s_2, a, a) &= (s_2, \lambda)\\
\delta(s_2, a, b) &= (s_3, b)\\
\delta(s_3, a, b) &= (s_3, b)\\
\delta(s_3, b, b) &= (s_4, \lambda)\\
\delta(s_4, b, b) &= (s_4, \lambda)\\
\delta(s_4, a, a) &= (s_4, \lambda)\\
\delta(s_4, a, k_0) &= (s_5, k_0)\\
\delta(s_5, a, k_0) &= (s_5, k_0)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

2013-B-03 **Binary Decision Diagram (BDD)**

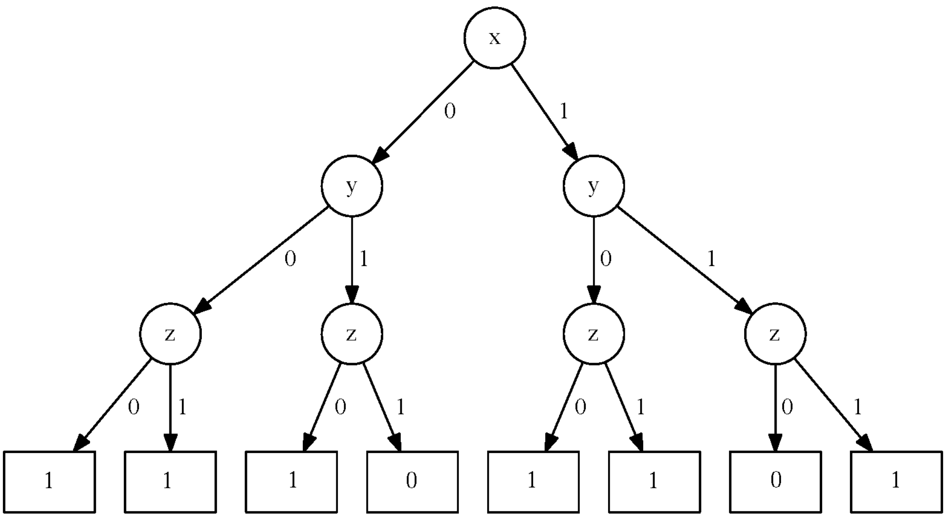
Gegeben sei die Boolesche Funktion

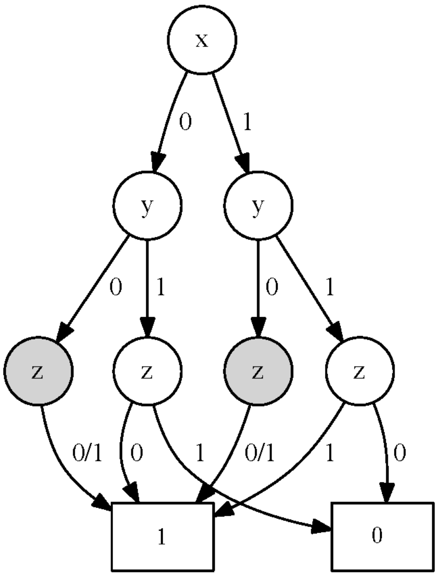
$$f : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B} : f(x, y, z) = \overline{(x \oplus z)} \vee \overline{y}$$

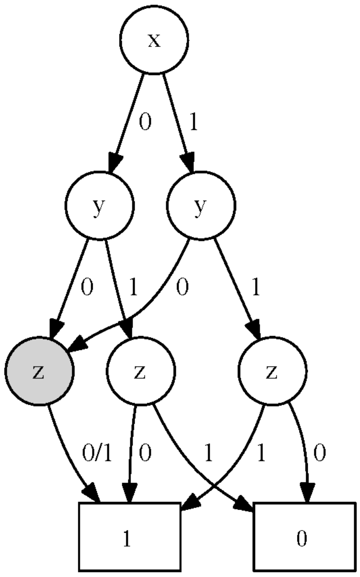
Erstellen Sie für die Funktion f ein Binary Decision Diagram mit der Variablenreihenfolge $x \to y \to z$. Lesen Sie aus dem berechneten BDD einen Booleschen Ausdruck in disjunktiver Normalform (DNF) ab.

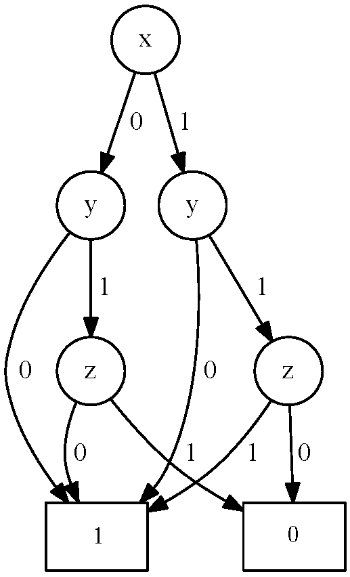
Bemerkung: Die abgebildete Tabelle können Sie für Ihren Lösungsweg nutzen, sie wird aber nicht bewertet.

x	y	z	$\overline{x \oplus z}$	$\overline{(x \oplus z)} \vee \overline{y}$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1









Disjunktive Normalform (DNF) aus dem BDD abgelesen:

$$f(x, y, z) = x'y' + x'yz' + xy' + xyz$$